

2008年4月26日-28日·第十届全国粒子物理学学术会议  
南京大学、南京师范大学

# 静态de Sitter时空中洛伦兹破缺的电动力学

Lorentz Violating Electrodynamics in Static de Sitter Spacetime

薛迅  
吴剑锋

华东师范大学

[xxue@phy.ecnu.edu.cn](mailto:xxue@phy.ecnu.edu.cn)

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 1 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

# 目录

-  1. 研究背景和动机
-  2. 对称空间理论
-  3. de Sitter时空的最大对称性
-  4. 局域正交标架场
-  5. 洛伦兹破缺的电动力学
-  6. 能量动量守恒
-  7. 静电场和静磁场
-  8. 结果和进一步工作的展望
-  致 谢

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 2 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

# 1 研究背景和动机

最近的天文观测有足够的证据表明我们的宇宙在加速膨胀并且加速度基本保持不变。这表明宇宙常数 $\Lambda$ 为正的小量，我们的宇宙是一个加速膨胀的渐近de Sitter的宇宙。

另一方面，由于没有物质的时空不再是闵氏时空，许多闵氏时空中的守恒律和对称性将不再保持，特别是，刻画闵氏时空对称性的洛伦兹协变性也很有可能是破缺的。因此，洛伦兹协变的理论仅仅只一个低能的有效理论，现在它应当表现为在de Sitter时空中的相应的协变形式。对于局域闵氏时空中的观测者而言，de Sitter时空中洛伦兹对称性是明显破缺的。因此，研究de Sitter时空中洛伦兹破缺的场论是很有意义的，这里我们首先研究洛伦兹破缺的经典电动力学。

研究背景和动机

对称空间理论

de Sitter时空的最大对...

局域正交标架场

Lorentz破缺的电动力学

能量动量守恒

静电场和静磁场

结果和进一步工作的展望

主要参考文献

致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 3 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

## 2 对称空间理论

一个 $N$ 维度规称作是最大对称的，如果它允许有 $N(N + 1)/2$ 个线性独立的Killing矢量。一个均匀且于某点各向同性的空间，必是最大对称的。当然也有，点点各向同性的空间必是最大对称的。反之，最大对称的空间必定是均匀且各向同性的。

一个最大对称的空间必然是常曲率空间，也即它的标曲率为常数。如果一个最大对称空间度规的正负特征值个数确定和曲率常数确定，那么这个最大对称空间必然是唯一的。如果我们要对最大对称空间进行详细的研究，只要在一个方便的坐标系中作出这样的度规就行了。

一个 $N$ 维最大对称的空间总可以嵌入在一个 $N + 1$ 维的平直空间中，利用这个平直空间的度规和嵌入条件，就可以很容易诱导出这个嵌入子流形的度规。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 4 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

### 3 de Sitter时空的最大对称性

对de Sitter时空来说，它可以看作是个嵌入在5维Minkowski时空中（度规为 $\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$ ）的4维超曲面 $\mathcal{S}_\Lambda$ ：

$$\mathcal{S}_\Lambda : \eta_{AB} \xi^A \xi^B = -R^2, \quad (1)$$

$$ds^2 = \eta_{AB} d\xi^A d\xi^B, \quad (2)$$

由此可以诱导出de Sitter时空的度规：

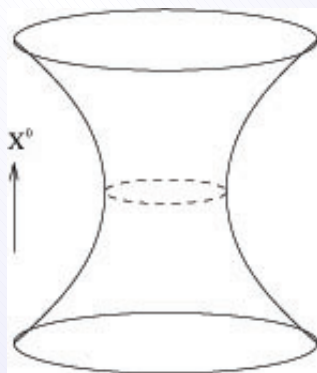
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu - \frac{K(\eta_{\mu\nu} \xi^\mu d\xi^\nu)^2}{1 + K(\eta_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu)} \quad (3)$$

特别的，这个度规可以在广义坐标变换下变成一个“时间无关”的度规，也就是静态度规。

$$ds^2 = (1 - K\mathbf{x}^2)dt^2 - d\mathbf{x}^2 - \frac{K(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2}. \quad (4)$$



对于de Sitter时空，有很多可选的坐标系，比如全局坐标，共形坐标，静态坐标等。通过全局坐标可以了解整个de Sitter时空的几何图像，下图是d维de Sitter时空的一个示意图



双曲面表示de Sitter空间，而虚线圈表示de Sitter空间中的最小体积 $S^{d-1}$ 。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 6 页 共 25 页

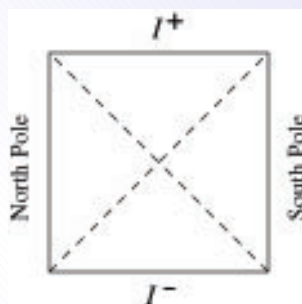
返回

全屏显示

关闭

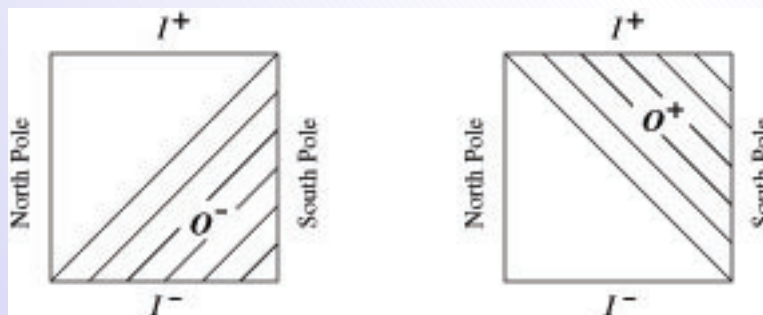
退出

而共形坐标则能够很方便的分析de Sitter时空中的因果结构。



$dS_d$ 的彭罗斯图. 南北两极处为类时测地线,图中每一点都代表一个 $d-2$ 维球面 $S^{d-2}$ .视界面为一个 $S^{d-1}$ .虚线表示在南极点处的观测者的过去和未来视界。共形时间 $T$ 在 $I^-$ 处为 $-\pi/2$ , 在 $I^+$ 处为 $\pi/2$ .

这个彭罗斯图所揭示的de Sitter空间的另一个性质就是：任何一个单一的观测者都无法了解到整个时空！



研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 7 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

静态坐标的好处在于可以将时间和空间分离，得到一个明显的类时Killing对称性. 需要一个类时Killing矢量的原因是显然的，只有有这么一个Killing矢量，我们才可以定义时间演化的问题，或者换句话说，我们才能定义Hamilton量。



这个彭罗斯图说明了静态坐标下Killing矢量 $\partial/\partial t$ 生成的因果方向. 视界（虚线表示）在 $r^2 = 1$ , 南因果光锥在右边的 $0 \leq r \leq 1$ . 无穷远过去和未来 $I^\pm$ 位于 $r = \infty$ .

我们在这里采取一种实现Lorentz破缺的方案，即用静态坐标的de Sitter时空中的场论作为闵氏时空场论的修正。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 8 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## 4 局域正交标架场

我们利用局域标架场理论来建立洛伦兹破缺的经典电动力学。在标架场理论中，利用标架 $\vartheta_\mu^a$ 可以在时空流形的任意一点的协变张量场的坐标分量 $T_{\lambda\mu\nu\dots}$ 和该点局域标架场分量 $T_{abc\dots}$ 之间建立联系:

$$T_{\lambda\mu\nu\dots} = \vartheta_\lambda^a \vartheta_\mu^b \vartheta_\nu^c \dots T_{abc\dots} \quad (5)$$

在坐标基下，时空的度规为 $g_{\mu\nu}$ ，而在局域标架场中，时空度规为闵氏度规 $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。选择球坐标，我们可以把静态de Sitter度规写成:

$$ds^2 = \sigma dt^2 - \frac{1}{\sigma} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6)$$

其中 $\sigma = 1 - Kr^2$ ，因此我们可以定义局域洛伦兹标架： $\vartheta_\mu^a, a = 0, 1, 2, 3$

$$\vartheta_\mu^a = \text{diag}(\sqrt{\sigma}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, r, r \sin \theta). \quad (7)$$

在广义相对论中，可观测量是局域洛伦兹坐标中的矢量和张量分量。在这里我们可以类似的定义闵氏时空中的观测量就是de Sitter时空中对应物理量的矢量张量场的局域标架场分量。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第9页共25页

返回

全屏显示

关闭

退出

静态de Sitter时空中的切矢量和余切矢量都可以按照局域标架场来分解，对电磁场，我们引入四维电磁势

$$A^\mu = e_a^\mu A^a = \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \varphi, \sqrt{\sigma} A_r, \frac{1}{r} A_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} A_\phi \right) \quad (8)$$

$$e_a^\mu = \eta_{ab} g^{\mu\nu} \vartheta_\nu^b = \text{diag} \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \sqrt{\sigma}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r \sin \theta} \right), A^a = (\varphi, A_r, A_\theta, A_\phi) .$$

这里的 $A^a$ 是4维“普通矢量”的分量，而“普通矢量”正是我们所寻找的可观测量。另外，我们注意到度规（4）的空间部分（对应于S3）构成一个正交曲线坐标系，因此如下可以定义梯度，散度，旋度和拉普拉斯算子。

$$\tilde{\nabla} \psi = d' \psi = \sqrt{\sigma} \psi_{,r} \vartheta^1 + \frac{1}{r} \psi_{,\theta} \vartheta^2 + \frac{1}{r \sin \theta} \psi_{,\phi} \vartheta^3 , \quad (9)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{f} = *' d' *' f = \frac{2}{r} \sqrt{\sigma} f_{r,r} + \sqrt{\sigma} f_{r,r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} f_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} f_{\theta,\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} f_{\phi,\phi} , (10)$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 10 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla} \times \vec{f} = *'d'f = & \left( \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} f_\phi + \frac{1}{r} f_{\phi, \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} f_{\theta, \phi} \right) \vartheta^1 \\ & + \left( \frac{1}{r \sin \theta} f_{r, \phi} - \sqrt{\sigma} f_{\phi, r} - \frac{\sqrt{\sigma}}{r} f_\phi \right) \vartheta^2 \\ & + \left( \frac{\sqrt{\sigma}}{r} f_\theta + \sqrt{\sigma} f_{\theta, r} - \frac{1}{r} f_{r, \theta} \right) \vartheta^3 ,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^2 \psi = (d'\delta' + \delta'd')\psi = & \frac{\sqrt{\sigma}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sqrt{\sigma} \psi, r) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi, \theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} .\end{aligned}\quad (12)$$

在以上的式子中我们用符号“ $\sim$ ”和“ $'$ ”表示这里的梯度，散度和旋度都是在子流形 $S^3$ 上的，而 $\vec{f}$ 也是子流形 $S^3$ 上的“普通矢量”， $\vec{f} = f_r \vartheta^1 + f_\theta \vartheta^2 + f_\phi \vartheta^3 = (f_r, f_\theta, f_\phi)$ ，它正好是4维“普通矢量” $f^a$ 的空间部分。而线性独立基 $\vartheta^i = \vartheta_\mu^i dx^\mu$ ， $i = 1, 2, 3$ 就给出了此3维“普通矢量”的方向。

研究背景和动机

对称空间理论

de Sitter时空的最大对...

局域正交标架场

Lorentz破缺的电动力学

能量动量守恒

静电场和静磁场

结果和进一步工作的展望

主要参考文献

致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 11 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

## 5 Lorentz破缺的电动力学

现在我们可以引入电磁场强协变2形式： $F = dA = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ 。为此我们首先定义“普通”电磁场强张量的分量 $F_{ab}$ ，它能够被写成一个矩阵的形式：

$$F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -E_r & -E_\theta & -E_\phi \\ E_r & 0 & B_\phi & -B_\theta \\ E_\theta & -B_\phi & 0 & B_r \\ E_\phi & B_\theta & -B_r & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

于是 $F_{\mu\nu}$ 就是：

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_r & -r\sqrt{\sigma}E_\theta & -r\sin\theta\sqrt{\sigma}E_\phi \\ E_r & 0 & \frac{r}{\sqrt{\sigma}}B_\phi & -\frac{r\sin\theta}{\sqrt{\sigma}}B_\theta \\ r\sqrt{\sigma}E_\theta & -\frac{r}{\sqrt{\sigma}}B_\phi & 0 & r^2\sin\theta B_r \\ r\sin\theta\sqrt{\sigma}E_\phi & \frac{r\sin\theta}{\sqrt{\sigma}}B_\theta & -r^2\sin\theta B_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

电磁场的作用量可以写为：

$$I_M = \int (-F \wedge *F - A \wedge *j), \quad (15)$$

符号“\*”是Hodge算子。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 12 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

而此时可以得到电场强度和磁场强度的表达式:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \tilde{\nabla} (\sqrt{\sigma}\varphi) - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\vec{B} = \tilde{\nabla} \times \vec{A}, \quad (17)$$

注意到  $F = dA$  是一个正合2形式,因此我们立刻可以得到Bianchi恒等式:  $dF = d^2A \equiv 0$  和动力学方程:  $\delta F = *d*F = j = j_\mu dx^\mu$ , 其中我们定义:

$$j^\mu = \vartheta_a^\mu j^a = \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \rho, \sqrt{\sigma} j_r, \frac{1}{r} j_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} j_\phi \right). \quad (18)$$

于是静态dS时空中的电磁场方程就可以写成:

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (19)$$

$$\tilde{\nabla} \times (\sqrt{\sigma} \vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (21)$$

$$\tilde{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \quad (22)$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 13 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出



另外，此时的规范条件也应该是相应的de Sitter协变规范，即 $\delta A = 0$ 。写成我们熟悉的形式就是：

$$\tilde{\nabla} \cdot (\sqrt{\sigma} \vec{A}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

这个de Sitter规范在后面处理静磁场问题的时候特别重要。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 14 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

## 6 能量动量守恒

现在我们考虑电磁场和物质的相互作用，也即和一个静态dS时空中的荷流的相互作用。

系统的拉氏量可以写成：

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}'_{\mathcal{M}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j_{\mu}A^{\mu} \quad (24)$$

其中， $\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 是纯电磁项， $\mathcal{L}'_{\mathcal{M}}$ 是相互作用项。于是电磁力可以通过作用量原理来得到：

$$f^{\mu} = F^{\mu}_{\gamma}j^{\gamma} = \left( e\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{\sqrt{\sigma}}, \sqrt{\sigma}f_r, \frac{1}{r}f_{\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}f_{\phi} \right) \quad (25)$$
$$\vec{f} = (f_r, f_{\theta}, f_{\phi}) = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) .$$

当 $K \rightarrow 0$ ，洛伦兹破缺的电动力学就变成洛伦兹协变的，电磁力也就同时变为洛伦兹力。如果我们像通常那样定义能动张量的纯电磁项：

$$T_{em}^{\alpha\beta} \equiv F^{\alpha}_{\gamma}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta} , \quad (26)$$

那么洛伦兹破缺的电动力学的能量动量守恒律就可以写成：

$$T_{em}^{\alpha\beta};_{\beta} = -F^{\alpha}_{\beta} j^{\beta} = -f^{\alpha} . \quad (27)$$

符号”;”是协变导数的缩写。我们把它写成标架形式：

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \tilde{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} , \quad (28)$$

$$\vec{S} = \sigma(\vec{E} \times \vec{B}), \omega = \frac{1}{2}(E^2 + B^2),$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{J}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - K(\vec{r} \times \vec{E} \times \vec{E}) = -\vec{f} , \quad (29)$$

$$\overleftrightarrow{\mathcal{J}} = -\vec{E}\vec{E} - \vec{B}\vec{B} + \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathcal{I}} (E^2 + B^2), \vec{g} = \vec{E} \times \vec{B} ,$$

其中 $\vec{S}$ ,  $\omega$ ,  $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}$ , 和 $\vec{g}$ 分别是系统的能流密度(坡印亭矢量), 能量密度, 电磁应力张量和动量密度。 $\overleftrightarrow{\mathcal{I}}$ 是 $S^3$ 中的单位张量. 我们看到这些方程明显不同于闵氏时空中的守恒方程。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 16 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

# 7 静电场和静磁场

作为静态de Sitter时空中电磁场方程的一个应用，我们研究了处于 $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0, \phi_0)$ 的一个点电荷（电荷为 $q$ ）的静电场。为定义局域标架场上的点电荷，需考察静态dS时空中的电流守恒律，即 $\delta j = 0$ ，写成标架形式为

$$\tilde{\nabla} \cdot (\sqrt{\sigma} \vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (30)$$

再在参数空间把这个方程写为球坐标的形式：

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \quad (31)$$

其中 $\vec{j} = (\sqrt{\sigma} j_r, j_\theta, j_\phi)$ 。因此 $S^3$ 上 $r_0$ 处的 $\delta$ 函数就可以写为： $\delta'^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \sqrt{\sigma} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ ，现在我们可以设 $\rho = q \delta'^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ 。利用我们前面得到的场方程，静电势方程就变成：

$$-\tilde{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \tilde{\nabla} (\sqrt{\sigma} \varphi) \right) = q \delta'^3(\vec{r} - \vec{r}_0) . \quad (32)$$

利用球坐标，把上式写成熟悉的形式，即：

$$-\nabla^2 \varphi + K \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + 3K \varphi + 2Kr \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{K^2 r^2}{\sigma} = q \delta'^3(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (33)$$

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 17 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

我们注意到这个方程必须是de Sitter协变的，而我们总可以在静态de Sitter空间中做一个合适的“拟平移”让空间的原点从 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 变到任意 $\mathbf{a}$ ，因此我们也总可以选择观测点就是空间坐标原点，即在(33)式中让 $r \rightarrow 0$ ，我们就有

$$-\nabla^2\varphi + 3K\varphi = q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (34)$$

于是解出静电势和静电场强就十分容易了。

$$\varphi = \frac{q}{4\pi r_0} e^{-\sqrt{3K}r_0} \quad (35)$$

$$\vec{E} = -q\frac{\vec{r}_0}{4\pi r_0^3} e^{-\sqrt{3K}r_0} + q\frac{\sqrt{3K}\vec{r}_0}{4\pi r_0^2} e^{-\sqrt{3K}r_0}. \quad (36)$$

这个形式显然和库仑定律不同。修正因子的存在使得静电势像一个汤川势，它事实上可以看作由de Sitter时空导致的光子静质量。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 18 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出



接下来我们考虑了静态dS时空中圈电流的静磁场。在 $\vec{r}_0$ 处放一个小圈电流(电流强度为 $I$ , 半径为 $a$ , 圆心在 $\vec{r}_0$ 处), 观测者仍然处于空间原点。在静磁场情形下, 需选择规范条件, 利用(23)式的规范条件, 可以得到

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{K}{\sqrt{\sigma}} \vec{r} \cdot \vec{A}. \quad (37)$$

另一方面, 从(34)式可得局域洛伦兹坐标下的守恒流为:

$$\tilde{j}(\vec{r}) = \sqrt{\sigma} \vec{j}(\vec{r}), \quad \vec{j}(\vec{r}) = j_r \vartheta^1 + j_\theta \vartheta^2 + j_\phi \vartheta^3 \quad (38)$$

注意到 $S^3$ 上的“普通矢量” $\vec{f} = f_r \vartheta^1 + f_\theta \vartheta^2 + f_\phi \vartheta^3$ 相应于一个3维欧氏空间中的矢量 $\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_r \vec{e}_r + f_\theta \vec{e}_\theta + f_\phi \vec{e}_\phi$ , 定义 $\vec{A}'(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\phi \vec{e}_\phi$ , 将方程(37)写成球坐标下的形式为

$$\nabla \cdot \vec{A}' = 4KrA'_r + Kr^2A'_{r,r} \quad (39)$$

而矢势的微分方程也就可以写成球坐标分量的形式:

$$-(\nabla^2 \vec{A}')_r + 4KA'_r + 6KrA'_{r,r} + Kr^2A'_{r,r,r} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} j_r \quad (40)$$

$$-(\nabla^2 \vec{A}')_\theta + [K(r(rA'_\theta)_{,r})_{,r} + 3KA'_{r,\theta}] = j_\theta \quad (41)$$

$$-(\nabla^2 \vec{A}')_\phi + [K(r(rA'_\phi)_{,r})_{,r} + \frac{3}{\sin \theta} KA'_{r,\phi}] = j_\phi. \quad (42)$$

可以证明方程 (40) – (42) 的对称解就是一个矢量方程的解，此矢量方程为：

$$-\nabla^2 \vec{A}'(\vec{r}) + 4K \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{j}'(\vec{r}) \quad (43)$$

其解为：

$$\begin{aligned} \vec{A}'(0) = A'_{\phi'} \vec{e}_{\phi'} = & -A'_{\phi'} \sin \theta \sin(\phi - \phi_0) \vec{e}_r \\ & -A'_{\phi'} \cos \theta \sin(\phi - \phi_0) \vec{e}_\theta - A'_{\phi'} \cos(\phi - \phi_0) \vec{e}_\phi \end{aligned} \quad (44)$$

其中

$$\vec{A}' = A'_{\phi'} \vec{e}_{\phi'} = \frac{Ia}{4\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0a \sin \theta' \cos \varphi}} e^{-\sqrt{4K} \sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0a \sin \theta' \cos \varphi}} \vec{e}_\varphi \quad (45)$$

当  $2r_0a \sin \theta' \ll r_0^2 + a^2$  时，即在远场 ( $r_0 \gg a$ ) 和近轴场 ( $r_0 \sin \theta' \ll a$ ) 区域，上面的积分能够做近似展开到三级：

$$\begin{aligned} A'_{\phi'} = \frac{Ia}{4\pi} \int d\varphi \cos \varphi & \left[ \mathcal{P} \frac{r_0a \sin \theta' \cos \varphi}{(r_0^2 + a^2)^{3/2}} + \mathcal{N} \frac{r_0^3 a^3 \sin^3 \theta' \cos^3 \varphi}{(r_0^2 + a^2)^{7/2}} \right] \\ & = \frac{Ia}{4\pi} \left[ \mathcal{P} \frac{r_0a \sin \theta'}{(r_0^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{3}{4} \mathcal{N} \frac{r_0^3 a^3 \sin^3 \theta'}{(r_0^2 + a^2)^{7/2}} \right], \end{aligned} \quad (46)$$

其中

$$\mathcal{P} = \frac{e^{-\sqrt{4K(r_0^2+a^2)}}}{2} (1 + \sqrt{4K(r_0^2 + a^2)})$$

$$\mathcal{N} = \frac{e^{-\sqrt{4K(r_0^2+a^2)}}}{48} \{15 + 15\sqrt{4K(r_0^2 + a^2)} + 24K(r_0^2 + a^2) + [\sqrt{4K(r_0^2 + a^2)}]^3\}$$

把原点变回到在观测点处，令 $\theta' = \pi - \theta$ ,  $\phi' = \phi_0 - \pi$ ，于是观测点处的圈电流的矢势 $\vec{A}$ 就是：

$$A(0) = \vec{A}'(0) = A'_r \vec{e}_r + A'_\theta \vec{e}_\theta + A'_\phi \vec{e}_\phi = -A'_{\phi'} \sin \theta \sin (\phi - \phi_0) \vec{e}_r \quad (47)$$
$$-A'_{\phi'} \cos \theta \sin (\phi - \phi_0) \vec{e}_\theta - A'_{\phi'} \cos (\phi - \phi_0) \vec{e}_\phi .$$

静电势和静磁势中的指数衰减因子事实上揭示了光子的有效质量。虽然在我们的模型中由静电势和静磁势得到的光子有效质量有很小的差异，但由 $\frac{m_\gamma c}{\hbar} \sim \sqrt{K} \sim \sqrt{\Lambda}$ 可以很简单的估算这个有效质量的量级大约为： $m_\gamma \sim 10^{-64}$ 克，这和现有文献中的实验上能观测的光子质量上限 $m_\gamma < 1.2 \times 10^{-51}$ 克相比小了13个数量级，因此目前的实验还远没有达到这样的检测精度。

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 21 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

## 8 结果和进一步工作的展望

我们将静态dS时空中协变的电动力学看作是在闵氏时空中的一个低能洛伦兹破缺的经典电动力学模型。另外，我们把物理的张量场的标架场分量定义为可观测量，在标架场形式下，我们得到了电磁场方程并研究了在此洛伦兹破缺的模型下的能量动量守恒律。最后作为洛伦兹破缺的电磁场理论的应用并且赋予该理论实验意义，我们分别研究了两个基本的问题：点电荷的静电场和圈电流的静磁场。我们发现在两种情况下都有一个类似的指数衰减因子，这个效应可以看作是一个典型的洛伦兹破缺的效应。

但是我们仅仅讨论了经典电动力学模型，进一步的工作将是如何在此框架下做相应的量子化问题。另一方面，我们在这里采用了静态度规，已有研究工作表明Beltrami坐标下的de Sitter时空可以很自然地定义推广的狭义相对论，如何在Beltrami坐标下构建电磁场理论就显得很有意义。我们在这里只讨论了标准模型电磁部分的推广问题，在我们的标准模型扩展方案中整个标准模型的扩展也很有意义。

研究背景和动机

对称空间理论

de Sitter时空的最大对...

局域正交标架场

Lorentz破缺的电动力学

能量动量守恒

静电场和静磁场

结果和进一步工作的展望

主要参考文献

致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 22 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出



## 9 主要参考文献

1. Sotirios Bonanos, Riemannian Geometry & Tensor Calculus @ Mathematica, <http://www.inp.demokritos.gr/~sbonano/RGTC/>
2. V. Alan Kostelecky, Matthew Mewes, Phys. Rev. D66 (2002), 056005; R. Jackiw, V. Alan Kostelecky, Phys. Rev. Lett. 82 (1999), 3572; V. Alan Kostelecky, Phys Rev D 69 105009 (2004)
3. Q. G. Bailey, V. Alan. Kostelecky, Phys.Rev. D70 (2004) 076006; D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998), [arXiv:hep-ph/9809521].
4. Marcus Spradlin, Andrew Strominger and Auastasia Volovich, Les Houches Lectures on de Sitter Space,[arXiv:hep-th/0110007]; S. Weinberg, Gravity and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity, John Wiley (1971)
5. Jun Luo, Liang-Cheng Tu, Zhong-Kun Hu and En-Jie Luan, New Experimental Limit on the Photon Rest Mass with a Rotating Torsion Balance, Phys. Rev. Lett. 90(2003)081801

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 23 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出



# 10 致 谢

- 感谢本次会议组织者

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 24 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出

# 谢谢!

研究背景和动机  
对称空间理论  
de Sitter时空的最大对...  
局域正交标架场  
Lorentz破缺的电动力学  
能量动量守恒  
静电场和静磁场  
结果和进一步工作的展望  
主要参考文献  
致 谢

访问主页

标题页



第 25 页 共 25 页

返回

全屏显示

关闭

退出